3-3 معدل التغير والميل

السابق	الحالي	لماذا؟
• قمت بتمثيل الأزواج المرتبة بيانيًا على مستوى إحداثي.	1 تستخدم معدل التغير لحل المسائل. 2 توجد ميل المستقيم .	• "السقوط المتهور" في منتزه "ويتن وايلد إميرالد بوينت" في جرينسبورو، شمال كارولينا، هو لعبة مثيرة تسقط خلالها من ارتفاع 76 قدمًا لأسفل شلال مياه منحدر. معدل تغيّر جولة اللعب قد يصف المسافة التي يسقطها الراكب على مدى فترة من الزمن.

مفردات تجديدة
معدل التغير (rate of change)
الميل (slope)

ممارسات رياضية
التفكير بطريقة تجريدية وكمّية.

1 معدل التغير

معدل التغير هو معدل يصف، في المتوسط، مدى تغيّر مقدار بالمقارنة مع التغيّر في مقدار آخر.

مفهوم أساسي معدل التغير

إذا كان x متغيرًا مستقلاً و y متغيرًا تابعًا، إذًا

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x}.$$

مثال 1 من الحياة اليومية إيجاد معدل التغير

الترفيه استخدم الجدول لإيجاد معدل التغير. ثم وضح دلالته.

عدد ألعاب الحاسوب	إجمالي التكلفة (AED)
x	y
2	78
4	156
6	234

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{AED} \\ \leftarrow \text{ألعاب} \end{matrix}$$

$$= \frac{\text{التغير في التكلفة}}{\text{التغير في عدد الألعاب}}$$

$$= \frac{156 - 78}{4 - 2}$$

$$\frac{78}{2} = \frac{39}{1}$$

معدل التغير هو $\frac{39}{1}$ هذا يعني أن كل لعبة تكلفتها 39 AED.

تمرين موجه

1. **إعادة البناء** يظهر الجدول كيف تتغير مساحة السطح المبلط مع عدد بلاط الأرضيات.

عدد بلاطات الأرضية	مساحة السطح المغطى بالبلاط (in^2)
x	y
3	48
6	96
9	144

A. أوجد معدل التغير. 16

B. فسّر دلالة معدل التغير. $16\ in^2$ من السطح مبلط لكل بلاط أرضية مستخدم.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-3 تمثيل أزواج مرتبة في المستوى الإحداثي.

الدرس 3-3 استخدام معدل التغير لحل المسائل. إيجاد ميل خط معين.

بعد الدرس 3-3 كتابة معادلات تغير طردي وتمثيلها بيانيًا وحلها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم الدرس "لماذا؟".

اطرح السؤال التالي:

- كيف يمكنك كتابة معدل التغير للرحلة؟ $\frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}}$
- ما النسبة المحتملة لرحلة إذا كان معدل التغير لها هو 2؟ الإجابة الإجابات: $\frac{2}{1}$، $\frac{6}{3}$، $\frac{10}{5}$
- أي الرحلات تشمل شلالات مائية أكثر انحدارًا، الرحلة التي معدل التغير لها هو $\frac{1}{2}$ أم الرحلة التي معدل التغير لها هو $\frac{5}{2}$؟ لماذا؟ $\frac{5}{2}$، لأن التغير في المسافة أكبر في $\frac{1}{2}$ ولكل منهما التغير نفسه في الوقت.

CH03.indb 172 8/20/2016 1:57:13 AM

1 معدل التغير

مثال 1 يوضح كيفية إيجاد معدل التغير مع الأخذ بالنظر جدول القيم الخاص بموقف من الحياة اليومية. **المثال 2** يوضح كيفية وصف معدل التغير لمسألة من الحياة اليومية يكون فيها الفرق بين قيمتي y مقسمًا على الفرق بين قيمتي x المناظرة غير ثابت. **المثال 3** يوضح كيفية تحديد إذا ما كانت الدالة خطية أم غير خطية.

التقويم التكويني

استخدم تمارين "التمرين الموجه" بعد كل مثال لتحديد مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 وقت القيادة استخدم الجدول لإيجاد معدل التغير. ثم وضح دلالته.

وقت القيادة (h)	المسافة المقطوعة (mi)
x	y
2	76
4	152
6	228

$\frac{38}{1}$؛ هذا يعني أن السيارة تسير بمعدل 38 ميلاً في الساعة.

تدريس الممارسات الرياضية

الاستنتاج يستوعب الطلاب المتفوقون في الرياضيات الكميات وعلاقاتها في حالات المسائل. معدل التغير هو مفهوم من المهم للغاية أن يتقنه الطلاب. شجّع الطلاب على الربط بين معدل التغير والكميات التي تمثلها دالة معينة.

حتى الآن أنت لم تر سوى معدلات تغير ثابتة. بينما تنطوي العديد من المواقف في الحياة اليومية على معدلات تغير غير ثابتة.

مثال 2 من الحياة اليومية المقارنة بين معدلات التغير

المنتزهات الترفيهية يوضح التمثيل البياني عدد الأشخاص الذين زاروا المتنزّهات الترفيهية الإماراتية في السنوات الأخيرة.

المصدر: *الرابطة الدولية للمتنزهات الترفيهية وأماكن الجذب.*

a. أوجد معدلات التغير للفترتين 2000–2002 و 2002–2004

2000–2002:

$$\frac{\text{التغير في الحضور}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{324 - 317}{2002 - 2000} \quad \begin{matrix}\leftarrow \text{أشخاص} \\ \leftarrow \text{أعوام}\end{matrix}$$ عوّض.

$$= 3.5 \text{ أو } \frac{7}{2}$$ حوّل لأبسط صورة.

خلال فترة العامين هذه، زاد الحضور بنحو 7 ملايين شخص بمعدل تغير 3.5 مليون شخص في العام.

الفترة 2002–2004:

$$\frac{\text{التغير في الحضور}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{325 - 324}{2004 - 2002}$$ عوّض.

$$= \frac{1}{2} = 0.5$$ حوّل لأبسط صورة.

خلال فترة العامين هذه، زاد الحضور بنحو واحد مليون شخص بمعدل تغير 0.5 مليون شخص في العام.

b. فسّر دلالة معدل التغير في كل حالة.

بالنسبة للفترة 2000–2002، زاد عدد الأشخاص الذاهبين إلى المنتزهات الترفيهية بمتوسط 3.5 مليون شخص في كل عام عن العام الذي يسبقه.

بالنسبة للفترة 2002–2004، زاد عدد الأشخاص الذاهبين إلى المنتزهات الترفيهية بمتوسط 0.5 مليون شخص في كل عام عن العام الذي يسبقه.

c. كيف يتم توضيح معدلات التغير المختلفة على التمثيل البياني؟

يوجد تغير رأسي أكبر بالنسبة للفترة 2000–2002 عن الفترة 2002–2004. لذلك، القسم المخصص للفترة 2000–2002 على التمثيل البياني أكثر انحدارًا.

تمرين موجه

2. راجع الرسم البياني أعلاه. بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد فترة العامين ذات أقل معدل تغير. بعد ذلك، استخدم الآلة الحاسبة للتحقق من إجابتك.

2004–2002؛ زاد الحضور بنحو 0.5 مليون شخص في العام.

يكون معدل التغير ثابتًا للدالة عندما يكون معدل التغير هو نفسه بين أي زوج من النقاط على التمثيل البياني للدالة. تتضمن الدوال الخطية معدل تغير ثابتًا.

نصيحة دراسية

الاستنتاج معدل التغير الموجب يشير إلى الزيادة بمرور الزمن. معدل التغير السالب يشير إلى تناقص الكمية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

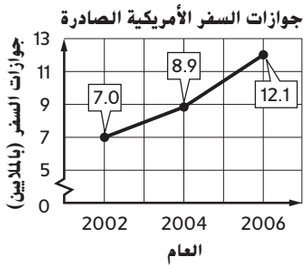
نصائح للمعلمين الجدد

الاستنتاج المنطقي اشرح للطلاب أن الدوال الخطية لها معدل تغير أو ميل ثابتان، بصرف النظر عن زوج النقاط المستخدم في الحساب، وفقًا لخصائص المثلثات المشابهة. وضّح الفكرة عن طريق حساب الميول لأضلاع مثلثين يمكن إنشاؤهما من خط معين. ذكّر الطلاب أنهم قد درسوا مثلثات متشابهة في مناهج الرياضيات السابقة، وأنهم سيتعلمون الكثير في منهج الهندسة.

CH03.indb 173 8/20/2016 1:57:14 AM

أمثلة إضافية

2 **السفر** يوضح التمثيل البياني أدناه عدد جوازات السفر الأمريكية التي تم إصدارها في أعوام 2002، و 2004، و 2006.



a. أوجد معدلات التغير للفترتين من 2002 إلى 2004 و 2004 إلى 2006.

950000/yr؛ 1600000/yr

b. فسّر دلالة معدل التغير في كل حالة. **بالنسبة للفترة من 2002 إلى 2004، كان هناك متوسط زيادة سنوية بمقدار 950000 جواز سفر تم إصداره. وبين الأعوام 2004 و 2006، كان هناك متوسط زيادة سنوية بمقدار 1600000 جواز سفر تم إصداره.**

c. كيف يتم توضيح معدلات التغير المختلفة على المخطط البياني؟ **يوجد تغير رأسي أكبر بالنسبة للفترة من 2004 إلى 2006 عن الفترة من 2002 إلى 2004. لذلك، يُعد قطاع الفترة من 2004 إلى 2006 في التمثيل البياني أكثر انحدارًا.**

3 حدد ما إذا كانت كل دالة خطية أم لا. اشرح.

a.

x	y
1	6
2	12
3	18
4	24

نعم؛ فمعدل التغير ثابت.

b.

x	y
−10	5
−2	1
6	−4
14	−10

لا؛ فمعدل التغير غير ثابت.

مثال 3 معدلات التغير الثابتة

حدد ما إذا كانت كل دالة خطية أم لا. اشرح.

a.

x	y
1	−6
4	−8
7	−10
10	−12
13	−14

x	y	معدل التغير
1	−6	
4	−8	$\frac{-8-(-6)}{4-1}=-\frac{2}{3}$
7	−10	$\frac{-10-(-8)}{7-4}=-\frac{2}{3}$
10	−12	$\frac{-12-(-10)}{10-7}=-\frac{2}{3}$
13	−14	$\frac{-14-(-12)}{13-10}=-\frac{2}{3}$

معدل التغير ثابت. لذا، الدالة خطية.

b.

x	y
−3	10
−1	12
1	16
3	18
5	22

x	y	معدل التغير
−3	10	
−1	12	$\frac{12-10}{-1-(-3)}=1$
1	16	$\frac{16-12}{1-(-1)}=2$
3	18	$\frac{18-16}{3-1}=1$
5	22	$\frac{22-18}{5-3}=2$

معدل التغير هذا غير ثابت. لذا، الدالة غير خطية.

نصيحة دراسية

دالة خطية أم غير خطية؟ لاحظ أن التغير في *x* و *y* ليس نفسه. لكي يكون معدل التغير خطيًا، لا بد أن يكون التغير في قيم *x* ثابتًا والتغير في قيم *y* ثابتًا.

تمرين موجه

3A.

x	y
−3	11
−2	15
−1	19
1	23
2	27

لا؛ فهذا معدل تغير غير ثابت.

3B.

x	y
12	−4
9	1
6	6
3	11
0	16

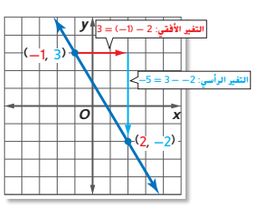
نعم؛ فمعدل التغير ثابت.

2 أوجد الميل

ميل المستقيم غير الرأسي هو معدل التغير في إحداثيات **y** (التغير الرأسي) إلى التغير في إحداثيات **x** (التغير الأفقي) وأنت تتحرك من نقطة لأخرى.

يمكن استخدام الميل لوصف معدل التغير. يصف الميل مقدار انحدار المستقيم. كلما زادت القيمة المطلقة للميل، زاد انحدار المستقيم.

يظهر التمثيل البياني مستقيمًا يمر بالنقطتين $(3, -1)$ و $(-2, 2)$.



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{\text{التغير في إحداثيات Y}}{\text{التغير في إحداثيات X}} = \frac{-2-3}{2-(-1)} = -\frac{5}{3}$$

لذا، ميل الخط المستقيم هو $-\frac{5}{3}$.

لأن الدالة الخطية لها معدل تغير ثابت، فأي نقطتين على مستقيم غير رأسي يمكن استخدامهما لتحديد ميل المستقيم.

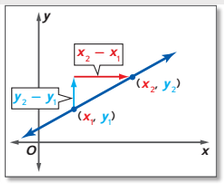
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

CH03.indb 174 8/20/2016 1:57:15 AM

مفهوم أساسي الميل

الشرح ميل المستقيم غير الرأسي هو نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.

التمثيل البياني



الرموز للمستقيم m الميل غير الرأسي خلال أي نقطتين. (x_1, y_1) و (x_2, y_2). يمكن إيجاده كما يلي.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

التغير في y ← التغير في x ←

قراءة الرياضيات

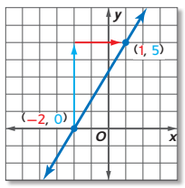
الرموز السفلى الدليلية y_1 يُقرأ y واحد والرمز السفلي الدليلي 2 x_2 يُقرأ x اثنان. 1 و 2 هما رمزان سفليان دليليان يشيران إلى أول وثاني نقطة تتوافق معها قيمة x و y.

يكون ميل المستقيم موجبًا أو سالبًا إذا لم يكن المستقيم أفقيًا. وإذا كان المستقيم أفقيًا يكون ميله صفرًا. وإذا كان المستقيم رأسيًا يكون ميله غير محدد..

المثال 4 ميل موجب وسالب وصفر

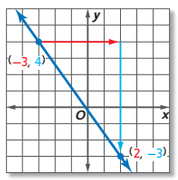
أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط.

a. $(-2, 0)$, $(1, 5)$



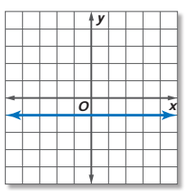
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{التغير الرأسي / التغير الأفقي}$$
$$= \frac{5 - 0}{1 - (-2)} \quad (-2, 0) = (x_1, y_1) \ = \ (1, 5) = (x_2, y_2)$$
$$= \frac{5}{3} \quad \text{حوّل لأبسط صورة.}$$

b. $(-3, 4)$, $(2, -3)$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{التغير الرأسي / التغير الأفقي}$$
$$= \frac{-3 - 4}{2 - (-3)} \quad (-3, 4) = (x_1, y_1) \ = \ (2, -3) = (x_2, y_2)$$
$$= \frac{-7}{5} = -\frac{7}{5} \quad \text{حوّل لأبسط صورة.}$$

c. $(-3, -1)$, $(2, -1)$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{التغير الرأسي / التغير الأفقي}$$
$$= \frac{-1 - (-1)}{2 - (-3)} \quad \text{عوّض.}$$
$$= \frac{0}{5} = 0 \quad \text{حوّل لأبسط صورة.}$$

انتبه!

الترتيب احذر من تغيير ترتيب قيم x أو قيم y.

تمرين موجه

أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط.

4A. $(3, 6)$, $(4, 8)$ 2

4B. $(-4, -2)$, $(0, -2)$ 0

4C. $(-4, 2)$, $(-2, 10)$ 4

4D. $(6, 7)$, $(-2, 7)$ 0

4E. $(-2, 2)$, $(-6, 4)$ $-\frac{1}{2}$

4F. $(4, 3)$, $(-1, 11)$ $-\frac{8}{5}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التعليم المتمايز AL OL BL

إذا يفترض الطلاب تلقائيًا أن النقطة في أقصى اليسار لا بد أن تكون (x_1, y_1) وأن النقطة في أقصى اليمين هي (x_2, y_2).

عندئذ اشرح أن تخصيص (x_1, y_1) و (x_2, y_2) اختياري. اكتب أزواج النقاط على بطاقات فهرسة. أعط بطاقة واحدة لكل طالب. اطلب منهم إيجاد الميل بكلا الطريقتين. ثم اسألهم عن الطريقة التي تجعل الطرح أسهل.

2 إيجاد الميل

يوضح المثالان 4 و 5 أربعة أنواع محتملة عندما ترغب في إيجاد ميل خط معين. **يوضح المثال 6** كيفية استخدام المعالجة الجبرية لإيجاد إحداثي مفقود عندما يكون الميل معلومًا.

التركيز على محتوى الرياضيات

الميل الصفري الميل الذي يساوي الصفر لا يعني أنه لا يوجد ميل. بل إنه يعني أن الخط ليس فيه انحدار، وبذلك يكون الخط أفقيًا.

مثال إضافي

4 أوجد ميل الخط المار بكل زوج من النقاط.

a. $(-3, 2)$ و $(5, 5)$ $\frac{3}{8}$

b. $(-3, -4)$ و $(-2, -8)$ -4

c. $(-3, 4)$ و $(4, 4)$ 0

نصائح للمعلمين الجدد

الخطوط الأفقية بعد مراجعة المثال 4c، اسأل الطلاب كيف سيحددون هل تقع نقطتان على خط أفقي أو لا دون تمثيل النقاط.

التركيز على محتوى الرياضيات

الميل والكسور المعتلة

يتم التعبير عن الميل عادة على صورة كسر أو عدد صحيح لأنه يوفر معلومات عن اتجاه الخط. العدد الكسري قد لا يوضح هذه المعلومات بسهولة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الأصوات اطلب من الطلاب العمل في مجموعات. أعط كل مجموعة تمثيلات بيانية للعديد من الخطوط بدون عناوين. اطلب من الطلاب وصفًا لفظيًا لمواقف من الحياة اليومية يمكن تمثيلها باستخدام كل تمثيل بياني.

CH03.indb 175 8/20/2016 1:57:16 AM

التركيز على محتوى الرياضيات

الميل غير المحدد الميل غير المحدد لا يماثل الميل الصفري. ميل الخط العمودي غير محدد لأنه ينتج عن القاعدة تعبير مقامه صفر، وأن القسمة على صفر تكون غير محددة.

أمثلة إضافية

5 أوجد ميل الخط الذي يمر بالنقطتين $(-2, -4)$ و $(-2, 3)$ غير محدد

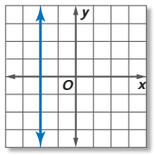
6 أوجد قيمة r بحيث يكون للخط الذي يمر عبر النقطتين $(6, 3)$ و $(r, 2)$ ميل مقداره $\frac{1}{2}$. 4

انتبه!

تجنّب الأخطاء بينما يعمل الطلاب في المثال 6، راقب من يحاولون إيجاد ناتج الضرب التقاطعي ذهنيًا وينسون ضرب كلٍ من r و -4 في 3.

مثال 5 الميل غير المحدد

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-2, 4)$ و $(-2, -3)$.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{التغير الرأسي / التغير الأفقي}$$
$$= \frac{-3 - 4}{-2 - (-2)} \quad \text{عوّض.}$$
$$= \frac{-7}{0} \quad \text{حوّل لأبسط صورة. أو غير محدد}$$

تمرين موجه

أوجد ميل الخط المار بكل زوج من النقاط.

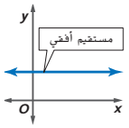
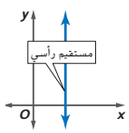
5A. $(6, 3), (6, 7)$ غير محدد **5B.** $(-3, 2), (-3, -1)$ غير محدد

نصيحة دراسية

ميل الصفر والميل غير المحدد إذا كان التغير في قيم y يساوي 0، فإن التمثيل البياني للمستقيم يكون أفقيًا. إذا كان التغير في قيم x يساوي 0، فإن الميل يكون غير محدد. هذا التمثيل البياني هو عبارة عن مستقيم رأسي.

فيما يلي ملخص للتمثيلات البيانية للمستقيمات ذات الميل المختلف.

ملخص المفاهيم الميل

الميل الموجب	الميل السالب	ميل 0	الميل غير المحدد
			
تزداد قيم الدالة على المجال بأكمله.	تنقص قيم الدالة على المجال بأكمله.	قيم الدالة ثابتة على المجال بأكمله.	العلاقة ليست دالة.

مثال 6 إيجاد الإحداثيات في ضوء الميل المحدد

أوجد قيمة r بحيث يكون الميل للمستقيم المار بالنقطتين $(1, 4)$ و $(-5, r)$ يساوي $\frac{1}{3}$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{r - 4}{-5 - 1} \quad \text{افترض أن } (x_1, y_1) = (1, 4) \text{ و } (x_2, y_2) = (-5, r)$$
$$\frac{1}{3} = \frac{r - 4}{-6} \quad \text{اطرح.}$$
$$3(r - 4) = 1(-6) \quad \text{أوجد حاصل الضرب التقاطعي.}$$
$$3r - 12 = -6 \quad \text{خاصية التوزيع}$$
$$3r = 6 \quad \text{أضف 12 إلى كل طرف وحوّل لأبسط صورة.}$$
$$r = 2 \quad \text{اقسم كل طرف على 3 وحوّل لأبسط صورة.}$$

إذًا، يمر الخط بـ $(-5, 2)$.

تمرين موجه

أوجد قيمة r بحيث يكون للمستقيم المار بكل زوج من النقاط الميل المحدد.

6A. $(-2, 6), (r, -4); m = -5$ 0 **6B.** $(r, -6), (5, -8); m = -8$ 4.75

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

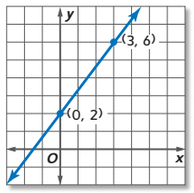
التعليم المتمايز OL BL

التوسع امنح الطلاب فرصًا لتحليل الميل عن طريق توفير سياقات للتمثيلات البيانية حيث يختلف الميل من نقطة إلى نقطة. يمكن أن يستكشف الطلاب لماذا تزداد للتمثيلات البيانية أو تنقص بسرعة أو بانتظام أو ببطء.

CH03.indb 176 8/20/2016 1:57:17 AM

التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد معدل التغير الممثل في كل جدول أو التمثيل بياني.

1. 

$\frac{4}{3}$

2.

x	y
3	−6
5	2
7	10
9	18
11	26

4

3a. 1.035; كان هناك متوسط زيادة في سعر التذكرة بمعدل 1.035 AED لكل عام.

3b. الإجابة النموذجية: 2000–1998؛ زيادة ميل القطاع يعني معدل تغير أكبر.

4. نعم؛ معدل التغير ثابت.

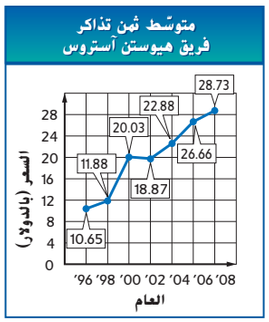
مثال 2

3. **الاستنتاج المنطقي** راجع التمثيل البياني على اليسار.

a. أوجد معدل تغير الأسعار من 2006 إلى 2008. فسّر دلالة معدل التغير.

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد فترة العامين التي معدل التغير لها أكبر من الفترة 2006-2008. اشرح.

c. بين أي أعوام تعتقد أنه قد تم بناء الملعب الجديد فيها؟ اشرح استنتاجك. الإجابة النموذجية: 2000 –1998؛ تظهر أسعار التذاكر زيادة حادة.



المصدر: *التقرير التسويقي للفريق*

مثال 3 حدد ما إذا كانت كل دالة خطية أم لا. اكتب نعم أو لا. اشرح.

4.

x	7−	4−	−1	2	5
y	5	4	3	2	1

5.

x	8	12	16	20	24
y	7	5	3	0	−2

لا؛ فمعدل التغير غير التمثيل.

الأمثلة 4–5 أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط.

6. (5, 3), (6, 9) 6
7. (−4, 3), (−2, 1) −1
8. (6, −2), (8, 3) $\frac{5}{2}$
9. (1, 10), (−8, 3) $\frac{7}{9}$
10. (−3, 7), (−3, 4) غير محدد
11. (5, 2), (−6, 2) 0

مثال 6 أوجد قيمة r بحيث يكون للمستقيم المار بكل زوج من النقاط الميل المحدد.

12. $(-4, r), (-8, 3), m = -5$ −17
13. $(5, 2), (-7, r), m = \frac{5}{6}$ −8

التمرين وحل المسائل

مثال 1 أوجد معدل التغير الممثل في كل جدول أو تمثيل بياني.

14.

x	y
5	2
10	3
15	4
20	5

$\frac{1}{5}$

15.

x	y
1	15
2	9
3	3
4	−3

−6

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1–13 للتحقق من استيعاب الطلاب.

استخدم المخطط في أسفل هذه الصفحة لتخصيص مهام لطلابك.

نصائح للمعلمين الجدد

وتيرة التقدم نظرًا لأن الميل مفهوم مهم في هذه الوحدة، فيجب أن يكون لدى الطلاب فهم جيد له. إذا لم تكن متأكدًا من إتقان طلابك لمفهوم الميل، فضع في اعتبارك قضاء وقتٍ إضافي في تناول هذا الدرس.

تنبيه للتمرين

ورق تمثيل بياني بالنسبة إلى التمارين 46, 47, 57, 59 سيحتاج الطلاب إلى ورق التمثيل البياني.

تدريس الممارسات الرياضية

الاستنتاج المنطقي بمقدر الطلاب المتفوقين في الرياضيات شرح واستخدام التطابقات بين التمثيلات المختلفة. في التمرين 3b، ناقش كيف يمكن أن يقارن الطلاب معدلات التغير بصريًا باستخدام التمثيل البياني.

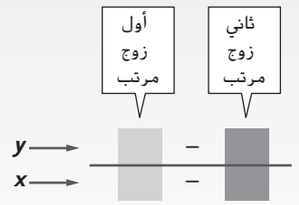
خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	المهمة	خيار اليومين	
AL مبتدئ	14–39, 48–49, 51–68	15–39, 51–56 فردي	14–38, 48, 49, 57–68 زوجي
OL أساسي	15–39, 40–49, 51–68 فردي	14–39, 53–56	40–49, 51–52, 57–68
BL متقدّم	40–62, (اختياري: 63–68)		

CH03.indb 177 8/20/2016 1:57:18 AM

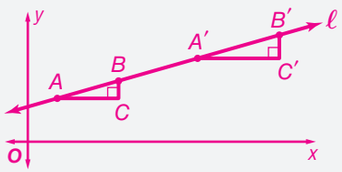
انتبه!

تحليل الخطأ بالنسبة إلى التمرين 52، إذا وجد الطلاب صعوبة في استبدال الإحداثيات الصحيحة في قاعدة الميل، فوضح لهم التمثيل التخطيطي التالي.



إجابات إضافية

46a-b.



$\overline{AC}$ و $\overline{A'C'}$ أفقيان $\overline{BC}$ و $\overline{B'C'}$ رأسيان.

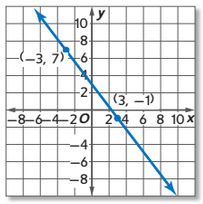
c46. الإجابة النموذجية: المثلثات ABC و$A'B'C'$ متشابهة لأن الخط ℓ قاطع لأجزاء متوازية $\overline{BC}$ و$\overline{B'C'}$. إذًا $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ لأن الزوايا المقابلة للخطوط المتوازية متطابقة. $\angle C \cong \angle C'$ لأن جميع الزوايا القائمة متطابقة. لذا، وبسبب التشابه مع $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. إذًا، الميل للخط $\frac{BC}{AC}$ الذي يمر بالنقطتين A و B، يساوي $\frac{B'C'}{A'C'}$ ميل الخط الذي يمر بالنقطتين A′ و B′.

48. الفرق في قيم المحور الأفقي x هو صفر دائمًا، والقسمة على الصفر غير محددة.

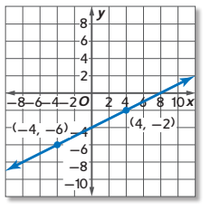
51. الإجابة النموذجية: يمكن استخدام الميل لوصف معدل التغير. معدل التغير هو نسبة تصف كيف تتغير كمية معينة بطريقة مرتبطة بتغير في كمية أخرى. ميل خط معين هو كذلك نسبة وهو عبارة عن نسبة التغير في إحداثيات المحور الرأسي y إلى التغير في إحداثيات المحور الأفقي x.

مثال 1 **أوجد معدل التغير الممثل في كل جدول أو التمثيل بياني.**

16. $-\frac{4}{3}$



17. $\frac{1}{2}$



18. 321.25؛ يوجد متوسط زيادة قدره 321.25 امرأة لكل عام من حيث المشاركة في رياضة اللاكروس.

مثال 2

18. **الرياضات** ما معدل التغير السنوي من 2004 حتى 2008 بالنسبة للنساء المشاركات في لعبة اللاكروس الجماعية؟ فسّر دلالة معدل التغير.

العام	عدد النساء
2004	5,545
2008	6,830

19. **البيع بالتجزئة** متوسط سعر التجزئة في ربيع 2009 للسيارة المستعملة موضح في الجدول على اليسار.

العمر (بالأعوام)	القيمة (AED)
2	17,378
3	16,157

a. اكتب دالة خطية تمثل سعر السيارة بالنسبة للعمر.

b. فسّر دلالة ميل المستقيم.

c. بافتراض أن معدل التغير الثابت يتنبأ بمتوسط سعر التجزئة لسيارة عمرها 7 أعوام.

19a. الإجابة النموذجية: $p = -1{,}221t + 19{,}820$

19b. تنخفض قيمة السيارة بمعدل 1,221 AED في العام.

11,273 AED

المثال 3 **حدد ما إذا كانت كل دالة خطية أم لا. اكتب نعم أو لا. اشرح.**

20.

x	4	2	0	−2	−4
y	−1	1	3	5	7

21.

x	7−	−5	−3	−1	0
y	11	14	17	20	23

22.

x	−0.2	0	0.2	0.4	0.6
y	0.7	0.4	0.1	0.3	0.6

23.

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

20–23. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

الأمثلة 4-5 **أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط.**

24. (4, 3), (−1, 6) $-\frac{3}{5}$

25. (8, −2), (1, 1) $-\frac{3}{7}$

26. (2, 2), (−2, −2) 1

27. (6, −10), (6, 14) غير محدد

28. (5, −4), (9, −4) 0

29. (11, 7), (−6, 2) $\frac{5}{17}$

30. (−3, 5), (3, 6) $\frac{1}{6}$

31. (−3, 2), (7, 2) 0

32. (8, 10), (−4, −6) $\frac{4}{3}$

33. (−8, 6), (−8, 4) غير محدد

34. (−12, 15), (18, −13) $-\frac{14}{15}$

35. (−8, −15), (−2, 5) $\frac{10}{3}$

مثال 6 **أوجد قيمة r بحيث يكون للمستقيم المار بكل زوج من النقاط الميل المحدد.**

36. (12, 10), (−2, r), $m = -4$ 66

37. (r, −5), (3, 13), $m = 8$ $\frac{3}{4}$

38. (3, 5), (−3, r), $m = \frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$

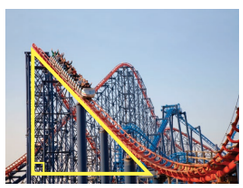
39. (−2, 8), (r, 4), $m = -\frac{1}{2}$ 6

B **أدوات** **استخدم مسطرة لتقدير ميل كل جسم من الأجسام.**

40.

الإجابة النموذجية: حوالي −0.5

41.



الإجابة النموذجية: حوالي −1

تدريس الممارسات الرياضية

الأدوات يعتاد الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشكلٍ كافٍ على استخدام الأدوات المناسبة. في التمرينين 40 و 41، ناقش وحدات القياس المستخدمة على المسطرة وفي الأشياء الفعلية التي تمثلها.

تدريس الممارسات الرياضية

الفرضيات بمقدور الطلاب المتفوقين في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا في إنشاء الفرضيات. في التمرين 52، شجّع الطلاب على إبداء سبب لكل خطوة في الحلول لاكتشاف أي أخطاء.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

178 | الدرس 3-3 | معدل التغير والميل

CH03.indb 178 8/20/2016 1:57:19 AM

42. القيادة عند القيادة صعودًا على تل معين، فأنت ترتفع 15 قدمًا كل 1,000 قدم تقطعه للأمام. فماذا يكون ميل الطريق؟ $\frac{3}{200}$

أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط.

45. $-\frac{2}{3}$

x	y
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

44. غير محدد

x	y
0.75	1
0.75	−1

43. $\frac{15}{4}$

x	y
4.5	−1
5.3	2

46. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تتحرى سبب كون ميل أي مستقيم مار بأي نقطتين على هذا مستقيم، ثابتًا.

a. بصري ارسم مستقيمًا ℓ يحتوي على النقاط A، و B، و A'، و B' على مستوى إحداثي. **46a–c. انظر الهامش.**

b. هندسي أضف قطعًا مكافئة لتشكيل مثلثين قائمين ABC و $A'B'C'$ بزاويتين قائمتين عند C و C'. صف $\overline{AC}$ و $\overline{A'C'}$، و $\overline{BC}$، و $\overline{B'C'}$.

c. لفظي ما العلاقة بين المثلثين ABC و $A'B'C'$؟ ما الإشارة الضمنية لهذا بالنسبة للميل بين أي نقطتين مختلفتين على المستقيم ℓ؟

47. كرة السلة يوضح الجدول المبين أدناه متوسط النقاط بكل مباراة (PPG) التي سجلها مايكل ريد في كل من التسعة مواسم الأولى له مع فريق ميلووكي باكس في الدوري الأمريكي لكرة السلة. **a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

الموسم	1	2	3	4	5	6	7	8	9
النقاط بكل مباراة	2.2	11.4	15.1	21.7	23.0	25.4	26.7	22.7	21.2

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا للبيانات. أوصل كل زوج من النقاط المجاورة بخط.

b. استخدم التمثيل البياني لتحديد الفترة التي شهدت أسرع زيادة في متوسط نقاط مايكل ريد بكل مباراة. اشرح استنتاجك.

c. ناقش الاختلاف في معدل التغير من الموسم 1 حتى الموسم 4، ومن الموسم 4 حتى الموسم 7، ومن الموسم 7 حتى الموسم 9.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. الاستنتاج لماذا لا تصلح صيغة الميل مع المستقيمات الرأسية؟ اشرح. **انظر الهامش.**

49. مسألة غير محددة الإجابة استخدم ما تعرفه عن معدل التغير لوصف الدالة الممثلة بواسطة الجدول.

الزمن (wk)	ارتفاع النبات (in.)
4	9.0
6	13.5
8	18.0

50. مسألة تحفيزية أوجد قيمة **d** بحيث يكون ميل المستقيم المار بـ (**a**, **b**) و (**c**, **d**) هو $\frac{c-b}{2}$.

51. الكتابة في الرياضيات فسّر العلاقة بين معدل التغير والميل، وكيفية إيجاد ميل أي مستقيم. انظر الهامش.

52. الفرضيات تعمل إيمان ورنا على إيجاد قيمة **a** بحيث يكون ميل المستقيم المار بـ (**a**, 10) و (8, −2) هو $\frac{1}{4}$. فهل كل منهما على صواب؟ اشرح.

إيمان

$$\frac{8-a}{-2-10}=\frac{1}{4}$$
$$4(8-a)=1(-12)$$
$$32-4a=-12$$
$$a=11$$

رنا

$$\frac{-2-10}{8-a}=\frac{1}{4}$$
$$1(8-a)=4(-12)$$
$$8-a=-48$$
$$a=56$$

49. راجع عمل الطلاب. معدل التغير هو $2\frac{1}{4}$ بوصات من النمو لكل أسبوع.

52. قامت إيمان ورنا بتسمية التغير في x على التغير في y.

المتابعة

لقد استكشف الطلاب التمثيلات البيانية للمعادلات الخطية.

اطرح السؤال التالي:

- ما الذي يمكن أن يوضحه لك التمثيل البياني الخطي حول العلاقة التي يمثلها؟ الإجابة النموذجية: يمكن أن يوضح لك معلومات عن معدل التغير، سواء كانت العلاقة موجبة أو سالبة، وكذلك مواقع التقاطعات مع المحور الأفقي x والمحور الرأسي y والنقاط الموجودة في التمثيل البياني.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

179

CH03.indb 179 8/20/2016 1:57:19 AM

تمرين على الاختبار المعياري

53. يتم التعبير عن تكلفة الطبعات من معالج صور عبر الإنترنت بالمعادلة C(p) = 29.99 + 0.13p. AED 29.99 هو تكلفة العضوية، و p هو عدد الطبعات 4 × 6 بوصة. ما الذي يمثله الميل؟ **A**

A تكلفة كل طباعة

B تكلفة العضوية

C تكلفة العضوية وطباعة واحدة

D عدد الطبعات

54. اشترت خولة حاسوبًا بسعر 1200 AED وانخفضت قيمته بشكل خطي. بعد عامين، وصلت قيمته إلى 250 AED. فكم كان مبلغ الانخفاض السنوي في السعر؟ **G**

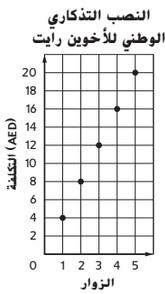
F 950 AED

G 475 AED

H 250 AED

J 225 AED

55. الإجابة القصيرة يبين التمثيل البياني مقدار التكلفة التي يتقاضاها النصب التذكاري الوطني للأخوين رايت من الزوار. فكم تتقاضى الحديقة من كل زائر؟ **AED 4**



56. الاحتمالات في مخيم لألعاب القوة، يتم اختيار لاعب قوة واحد بشكل عشوائي من كل فريق. يتكون فريق النجوم لألعاب القوة من 5 أفراد أعمارهم 11 عامًا، و7 أفراد أعمارهم 12 عامًا، و10 أفراد أعمارهم 13 عامًا، و8 أفراد أعمارهم 14 عامًا. ما احتمالية أن يكون عمر لاعب القوة الذي يتم اختياره عددًا فرديًا؟ **C**

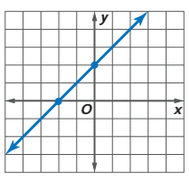
A $\frac{1}{30}$ B $\frac{1}{15}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{3}{5}$

مراجعة شاملة

حل كل معادلة فيما يلي عن طريق التمثيل البياني. (الدرس 2-3)

57. $3x + 18 = 0$ **−6** **58.** $8x - 32 = 0$ **4** **59.** $0 = 12x - 48$ **4**

أوجد التقاطعين مع المحور الأفقي *x* والمحور الرأسي *y* للتمثيل البياني لكل دالة خطية. (الدرس 3-1)

60. 

−2, 2

61.

x	y
−3	−4
−2	−2
−1	0
0	2
1	4

−1, 2

62. العودة للمدرسة تبلغ تكلفة تذاكر العرض 9 AED للشخص الواحد و 15 AED لشخصين. إذا كانت هناك مجموعة من سبعة طلاب يرغبون في الذهاب إلى العرض، فاكتب معادلة تمثل أقل سعر p لتذاكرهم، ثم حلها. (الدرس 3-1) $p = 15(3) + 9(1)$; AED 54

مراجعة المهارات

أوجد ناتج قسمة كل مما يلي.

63. $8 \div \frac{2}{3}$ **12** **64.** $\frac{3}{8} \div \frac{1}{4}$ $\frac{3}{2}$ **65.** $\frac{5}{8} \div 2$ $\frac{5}{16}$

66. $\frac{12 \cdot 6}{9}$ **8** **67.** $\frac{2 \cdot 15}{6}$ **5** **68.** $\frac{18 \cdot 5}{15}$ **6**

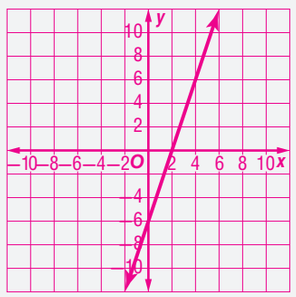
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

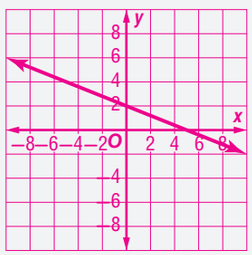
4 التقويم

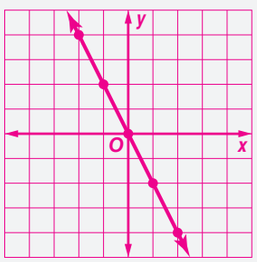
بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب
جهّز نسخًا متعددة لخمسة خطوط مختلفة ممثلة بيانيًا على مستوى إحدائي. أعط تمثيلاً بيانيًا واحدًا لكل طالب. بينما يغادر الطلاب الغرفة، اطلب منهم إخبارك بميول الخطوط الموجودة لديهم.

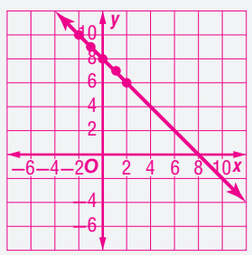
التقويم التكويني
تحقق من استيعاب الطلاب للدرس 3-3.

إجابات إضافية (اختبار منتصف الوحدة)

.4


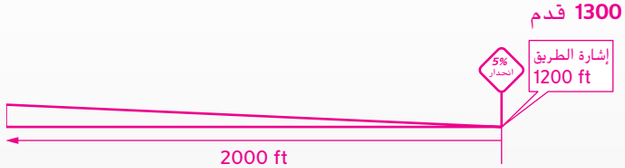
.5


.6


.7


التعليم المتمايز OL BL

التوسع تشير إشارة طريق على تل إلى أن درجة الانحدار 5%. ارتفاع الطريق عند هذه النقطة يساوي 1200 قدم. أعد تمثيلًا لهذا الموقف. كم سيكون ارتفاع الطريق عند مستوى 2000 قدم أفقية إضافية من إشارة الطريق؟
1300 قدم



CH03.indb 180 8/20/2016 1:57:20 AM

الوحدة 3 اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 1-3 حتى 3-3

حدد ما إذا كانت كل معادلة هي معادلة خطية أم لا. اكتب نعم أو لا. إذا كانت الإجابة "نعم"، فاكتب المعادلة بالصيغة القياسية. (الدرس 3-1)

1. $y = -4x + 3$ نعم، $4x + y = 3$
2. $x^2 + 3y = 8$ لا
3. $\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y = -1$ نعم، $x - 3y = -4$

مثّل بيانيًا كل معادلة مستخدمًا التقاطع مع المحور الأفقي x والمحور الرأسي y. (الدرس 3-1) **4–5. انظر الهامش.**

4. $y = 3x - 6$
5. $2x + 5y = 10$

مثّل بيانيًا كل معادلة برسم جدول. (الدرس 3-1)

6. $y = -2x$
7. $x = 8 - y$

6–7. انظر الهامش.

8. **مبيعات الكتب** المعادلة $5x + 12y = 240$ تصف إجمالي المبلغ النقدي المحصل عند بيع x كتب ذات غلاف ورقي بسعر 5 AED للكتاب و y كتب ذات غلاف كرتوني مقوى بسعر 12 AED للكتاب. مثّل بيانيًا المعادلة مستخدمًا التقاطع مع المحور الأفقي x والمحور الرأسي y. (الدرس 3-1) **انظر الهامش.**

أوجد جذر كل معادلة. (الدرس 3-2)

9. $x + 8 = 0$ **−8**
10. $4x - 24 = 0$ **6**
11. $18 + 8x = 0$ $-\frac{9}{4}$
12. $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2} = 0$ $\frac{5}{6}$

حل كل معادلة فيما يلي عن طريق التمثيل البياني. (الدرس 3-2)

13. $-5x + 35 = 0$ **7**
14. $14x - 84 = 0$ **6**
15. $118 + 11x = -3$ **−11**

16. **الاختيار من متعدد** الدالة $y = 3x^2 - 15$ تمثل درجة الحرارة الخارجية، بدرجات فهرنهايت، في إحدى المدن الصغيرة في ألاسكا حيث x يمثل عدد الساعات بعد منتصف الليل. الدالة تكون دقيقة بالنسبة لقيم x التي تمثل منتصف الليل حتى 4:00 م. أوجد صفر هذه الدالة. (الدرس 3-2) **C**

A 0
B 3
C 5
D −15

17. أوجد معدل التغير المُمَثَّل في الجدول. (الدرس 3-3) $\frac{4}{3}$
أوجد ميل المستقيم المار عبر كل زوج من النقاط. (الدرس 3-3)

x	y
1	2
4	6
7	10
10	14

18. (2, 6), (4, 12) **3**
19. (1, 5), (3, 8) $\frac{3}{2}$
20. (−3, 4), (2, −6) **−2**
21. $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right)$ $-\frac{3}{2}$

22. **الاختيار من متعدد** أوجد قيمة r بحيث يكون للمستقيم المار بزوج النقاط المحدد. (الدرس 3-3) **G**

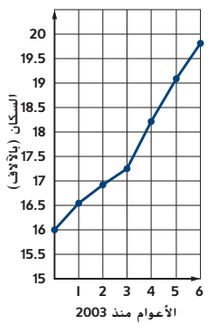
$(-4, 8), (r, 12), m = \frac{4}{3}$

F −4
G −1
H 0
J 3

23. أوجد ميل المستقيم المار بزوج النقاط. (الدرس 3-3) **12**

x	y
2.6	−2
3.1	4

24. **النمو السكاني** يعرض التمثيل البياني النمو السكاني في هيكرفيل منذ 2003. (الدرس 3-3)



a. في أي فترة زمنية كان معدل التغير هو الأكبر؟ **2006–2007**

b. وضح معنى الميل من 2003 إلى 2009. **b. يزداد عدد سكان هيكرتسفيل بنحو 630 نسمة تقريبًا في العام.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التقويم التكويني

استخدم اختبار منتصف الوحدة لتقييم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة إلى المسائل التي تمت الإجابة عنها بشكل غير صحيح، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها في الأقواس.

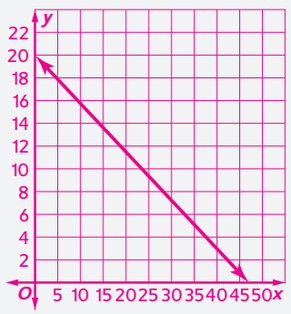
مطوياتي منظم الدراسة

مطويات® دينا زايك

قبل أن يكمل الطلاب اختبار منتصف الوحدة، شجعهم على مراجعة المعلومات الخاصة بالدروس 1-3 إلى 3-3 في مطوياتهم.

إجابة إضافية

8.



CH03.indb 181 8/20/2016 1:57:21 AM